

**Instituto de Física - UFF**  
**Mecânica Analítica - 1ºP/2013 - Prof. Daniel Jonathan**  
**Lista de Exercícios 2 - teste na terça, 21/05**

1. Considere um foguete de estágio único, de massa total inicial  $m_0$ , lançado verticalmente. Seu motor fornece uma força de impulso estática  $T = -v_e \dot{m}$ , onde  $-\dot{m} = \mu > 0$  é suposto constante e  $v_e$  é (o módulo da) velocidade de emissão dos propelentes com respeito ao foguete.

a) Levando em conta a aceleração da gravidade, suposta constante ( $= g$ ), e desprezando outras forças (arrasto, diferenciais de pressão, etc), mostre que a eq. de movimento correta para o foguete resulta da Lagrangeana

$$L = \frac{\dot{z}^2}{2} + \left( \frac{\mu v_e}{m_0 - \mu t} - g \right) z$$

obs: reciprocamente, é possível também derivar essa Lagrangeana a partir da eq. de movimento. (vejam no artigo de Leubner e Krumm discutido em sala).

b) Vimos que, se  $g = 0$ , a velocidade do foguete evolui segundo a eq. de Tsiolkovsky. Usando um raciocínio análogo mostre que, no caso  $g \neq 0$ , a evolução da velocidade e da posição vertical  $z(t)$  do foguete podem ser escritos respectivamente como

$$v(t) = v_e \left( \ln \frac{1}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right), \quad z(t) = \frac{v_e^2}{g\alpha} \left( \gamma - (1 - \gamma) \ln \frac{1}{(1 - \gamma)} - \frac{\gamma^2}{2\alpha} \right)$$

onde  $\gamma(t) \equiv \mu t / m_0$  é a fração da massa inicial perdida até o instante  $t$ , e  $\alpha \equiv \frac{T}{gm_0}$  é a razão entre a força de impulso estático do foguete e seu peso no momento do lançamento.

c) Considere o momento em que todo o combustível inicialmente presente no foguete termina de ser queimado. A partir desse momento, o foguete tem energia total (cinética + potencial) e massa total constantes. Escreva o valor dessa energia, e observe que quanto maior for  $\alpha$  (ou seja, quanto mais rapidamente o foguete é acelerado), maior é a energia disponível ao final da queima. Obtenha o valor-limite correspondendo a um  $\alpha$  infinito.

Obs: em particular, esse resultado indica que, ao contrário do caso onde  $g = 0$ , para  $g \neq 0$ , quanto maior for a razão entre  $T$  e  $m_0 g$ , maior será a velocidade final do foguete.

2. Uma “transformação de calibre” dos potenciais escalar ( $\phi$ ) e vetor ( $\mathbf{A}$ ) do eletromagnetismo é definida por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

onde  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  é uma função diferenciável arbitrária.

a) O que ocorre com os campos elétrico  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  e magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  sob essa transformação?

b) De que maneira a Lagrangeana de uma partícula se movendo sobre a ação destes potenciais é afetada por essa transformação? As equações de movimento são ou não alteradas?

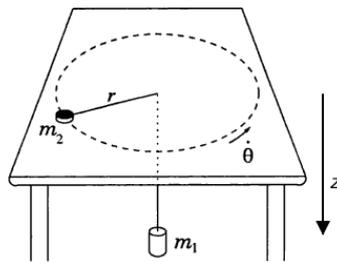
3. Para um oscilador harmônico de massa  $m$  e frequência angular  $\omega$ , seja  $x_f(t)$  uma solução da eq. de movimento entre  $t_0 = 0$  e  $t_1$ , e  $x(t) = x_f(t) + \eta(t)$ , com  $\eta(0) = \eta(t_1) = 0$ , uma outra trajetória próxima com mesmo ponto inicial e final. Vamos verificar explicitamente que a ação é extremalizada pela trajetória física  $x_f(t)$ , como prevê o princípio de Hamilton.

a) Mostre que  $S[x] = S[x_f] - \frac{m}{2} \int_0^{t_1} (\eta \ddot{\eta} + \omega^2 \eta^2) dt$ .

b) Expandindo  $\eta$  na série de Fourier  $\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen}(n\pi t/t_1)$  (por que isso é possível?), mostre que  $S[x] = S[x_f] + \frac{m t_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \left( \frac{n^2 \pi^2}{t_1^2} - \omega^2 \right)$  e conclua que ação é mínima para a trajetória física se  $t_1 \leq T/2 = \pi/\omega$ .

4. O sistema representado na figura é tal que a massa  $m_2$  se move sem atrito sobre a mesa horizontal e a massa  $m_1$  só pode movimentar-se verticalmente. O fio que une as massas é inextensível. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

a) Escreva o(s) vínculo(s) e as equações de movimento do sistema,



b) Identifique o significado físico do(s) multiplicador(es) de Lagrange, e mostre que a tensão no fio é dada por

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[ g + \frac{p_\theta^2}{m_2^2 r^3} \right],$$

onde  $p_\theta$  é o valor constante de  $m_2 r^2 \dot{\theta}$ .

c) Cheque seu resultado verificando a aceleração de queda da massa  $m_1$  no caso particular em que  $p_\theta = 0$ .

5. Considere novamente o problema do disco vertical rolando sem deslizar sobre um plano (exemplo 1.2.6 do livro).

a) Escreva a Lagrangeana do sistema (atenção com os momentos de inércia!)

b) Esse sistema possui vínculos não-holônomos, mas lineares nas velocidades generalizadas (eq. 1.2.10). Use a técnica de multiplicadores de Lagrange para escrever as suas equações de movimento.

c) Resolva essas equações e descreva em palavras como é o movimento resultante.

Dicas: 1) Pode não parecer a princípio, mas  $\phi(t)$  tem uma expressão muito simples! 2) Tente reduzir o problema ao do “patinete”, (exemplo 2.4.2).

6. Uma partícula move-se no potencial gravitacional produzido pelas seguintes distribuições de massa homogêneas: (i) esfera de raio  $R$ ; (ii) paralelepípedo infinitamente longo com seção transversal quadrada; (iii) haste de comprimento  $l$ ; (iv) disco de raio  $R$ ; (v) cilindro infinitamente longo com seção transversal circular; (vi) plano infinito; (vii) plano semi-infinito; (viii) fio enrolado na forma de uma hélice infinita de raio  $R$  e passo  $p$ . Explique, justificando, quais são as componentes de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{L}$  (ou combinações delas) que se conservam em cada caso. Não se esqueça de explicar a razão de existir uma conexão entre as simetrias dos objetos com a conservação dessas componentes.

7. Uma partícula de massa  $m$  e carga elétrica  $e$  move-se num campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ , cujo potencial vetor é  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$  (o potencial escalar é nulo). (i) Mostre que as equações de Lagrange para a partícula equivalem a  $\dot{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  e determine o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  em termos de  $\mathbf{B}$ . (ii) Exprima a Lagrangeana em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  e mostre que, embora  $\phi$  seja coordenada cíclica, a componente  $L_z = m\rho^2 \dot{\phi}$  do momento angular *não* é conservada. Explique.

8. Seja  $q_k$  uma coordenada cíclica da Lagrangeana  $L(q, \dot{q}, t)$ . Se  $L$  for substituída por  $\bar{L} = L + \frac{d}{dt}F(q, t)$ , em geral  $q_k$  *não* será coordenada cíclica de  $\bar{L}$  e o seu momento conjugado *não* mais se conservará. Mas sabemos que  $L$  e  $\bar{L}$  produzem as mesmas equações de movimento! Resolva esse paradoxo aparente. Escolhendo  $F = q^2$ , discuta o caso da partícula livre em uma dimensão, com  $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ .

9. Uma partícula de massa unitária move-se ao longo de uma linha reta sujeita à força não- conservativa  $F = -\gamma\dot{x}^2$ , com  $\gamma$  uma constante. (i) Mostre que a equação de movimento da partícula pode ser obtida da lagrangiana  $L = e^{2\gamma x}\dot{x}^2/2$ . (ii) Mostre que a conservação da integral de Jacobi  $h$  associada a esta lagrangiana pode ser expressa na forma  $\dot{x}e^{\gamma x} = C_1$ , onde  $C_1$  é uma constante. (iii) Prove que a ação é invariante sob a transformação  $x' = x + a$ ,  $t' = e^{\beta a}t$  para um certo valor de  $\beta$  (determine-o). Interprete geometricamente o significado desta transformação. (iv) Considerando a versão infinitesimal da transformação do item anterior, use o teorema de Noether para demonstrar que  $(\gamma t\dot{x} - 1)\dot{x}e^{2\gamma x} = C_2 = \text{constante}$ . (v) Combinando as duas constantes de movimento para eliminar  $\dot{x}$ , prove que

$$x(t) = A + \frac{1}{\gamma} \ln(B + \gamma t)$$

e verifique diretamente que esta é a solução da eq. de movimento da partícula.